Παρασκευή 10/04/20

Μάθημα 4ο

Διαισθητικά:
Επαρκές στατιστικό είναι μια συνάρτηση των δεδομένων τ.ω το ποσό της πληροφορίας που περιέχεται στα δεδομένα για το άγνωστο χαρακτηριστικό του πληθυσμού που μελετάμε να είναι ίσο με το ποσό πληροφορίας που περιέχεται στο επαρκές στατιστικό

Σχηματικά:
Αν είναι διαθέσιμο τ.δ X_1, X_2, X_n από κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$

$T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1, \dots, X_n) \longleftarrow$ σ.σ. (συνάρτηση του τ.δ)

Διαισθητικά:
Το $T(\underset{\sim}{X})$ επαρκές για το θ αν:
Ποσό Πληροφορίας$(X_1, \dots X_n)$ = Ποσό Πληροφορίας $(T(\underset{\sim}{X}))$

Δηλαδή το $T(\underset{\sim}{X})$ συμπυκνώνει και εκφράζει όλη την πληροφορία που υπάρχει στο $X_1, \dots X_n$ για την θ και μάλιστα το $T(\underset{\sim}{X})$ είναι βαθμωτό τυχαίο μέγεθος

Ορισμός Επαρκές Στατιστικό
Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$
Η στατιστική συνάρτηση $T = T(X_1, \dots, X_n)$ λέγεται επαρκής σ.σ. για την κατανομή $f(x,\theta)$ ή για την παράμετρο $\theta \in \Theta$, αν η δεσμευμένη κατανομή του $\underset{\sim}{X} / T(\underset{\sim}{X}) = t$ είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου θ, για κάθε $\theta \in \Theta$

Αν είναι γνωστή η τιμή της σ.σ $T=T(\underset{\sim}{X})$ τότε η κατανομή του τ.δ. $\underset{\sim}{X}=(X_1,\dots,X_n)'$ δεν εξαρτάται από τη θ και τότε το T περιέχει όλη την αποιτούμενη πληροφορία για τη θ

Για την εύρεση του επαρκούς στατιστικού

Παραγοντικό Θεώρημα των Neyman-Fisher:
Έστω τ.δ. $X_1,\dots X_n$ από πληθυσμό που περιγράφεται από την κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$. Η στατιστική συνάρτηση $T=T(X_1,\dots X_n)$ είναι επαρκής για την παράμετρο $\theta\in\Theta$ ή ~~για~~ την οικογένεια κατανομών $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta$ αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $q(\cdot)$ και $h(\cdot)$ τέτοιες ώστε

$$f(\underset{\sim}{x},\theta)=q(T(x_1,\dots x_n),\theta)\,h(x_1,\dots,x_n)$$ για κάθε $\underset{\sim}{x}=(x_1,\dots x_n)$, $\theta\in\Theta$ με $f(\underset{\sim}{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)$.

Παράδειγμα (Διωνυμική κατανομή)
Έστω τ.δ. $X_1,\dots X_n$ από κατανομή διωνυμική $B(m,\theta)$ με συνάρτηση πιθανότητας $p_X(x,\theta)=\binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x}$ $x=0,1,\dots m$, $\theta\in(0,1)$ Να προσδιοριστεί η επαρκής σ.σ για το θ

Είναι $p(\underset{\sim}{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n}p_X(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{m-x_i}$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}\right)\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)} =$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}\right)\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{nm-\sum_{i=1}^{n}x_i} =$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{nm}}_{q\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,\,\theta\right)}\ \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}\right)}_{h(x_1,\dots x_n)}$$

$= q(T(\underset{\sim}{x}), \theta) \cdot h(\underset{\sim}{x})$. και επομένως $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ επαρκές στατιστικό.

Παράδειγμα (Κατανομή Poisson).

Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή Poisson(θ) με σ.π $p_x(x, \theta) = e^{-\theta} \cdot \dfrac{\theta^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ και $\theta > 0$

Να προσδιοριστεί το επαρκές στατιστικό

Είναι $p(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} p_x(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} =$

$$= \frac{e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} = \underbrace{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot e^{-n\theta}}_{q(\sum_{i=1}^{n} x_i, \theta)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}}_{h(x_1, \ldots, x_n)} = q(T(\underset{\sim}{x}), \theta) h(\underset{\sim}{x})$$

Επομένως η σ.σ $T = T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι επαρκής

Παράδειγμα (Κανονική Κατανομή)

Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$. Να βρεθεί το επαρκές στατιστικό στις ακόλουθες περιπτώσεις
α) σ^2 γνωστή και $\mu = \theta$ άγνωστη
β) μ γνωστή και $\sigma^2 = \theta$ άγνωστη
γ) μ, σ^2 άγνωστα

Είναι $f(x; \mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

α) $f(\underset{\sim}{X},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2} =$

$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sum x_i^2 - 2\theta\sum x_i + n\theta^2)} =$

$= \underbrace{e^{\frac{\theta}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\theta^2}{2\sigma^2}}}_{g(\sum_{i=1}^{n} x_i,\theta)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}_{h(x_1,\dots,x_n)}$

$= g(T(\underset{\sim}{X}),\theta) \cdot h(\underset{\sim}{X})$ άρα $T(\underset{\sim}{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ επαρκές

β) μ γνωστή, $\sigma^2 = \theta$ άγνωστη

$f(\underset{\sim}{X},\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2} =$

$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi\theta)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\theta}\sum(x_i-\mu)^2}}_{g(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,\theta)} \quad \underbrace{}_{h(x_1,\dots x_n)=1}$

Άρα το επαρκές στατιστικό είναι $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.

γ) μ, σ^2 άγνωστες παράμετροι

$f(\underset{\sim}{X},\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\sigma^2}(x_i-\mu)^2} =$

$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)} =$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}}$$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \mu, \sigma^2\right) \cdot h(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= g(T_1(\underset{\sim}{x}), T_2(\underset{\sim}{x}), \mu, \sigma^2) h(\underset{\sim}{x}) \quad \text{με } h(\underset{\sim}{x}) = 1$$

Άρα $(T_1(\underset{\sim}{x}), T_2(\underset{\sim}{x})) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ το επαρκές στατιστικό

Παράδειγμα (Εκθετική Κατανομή):

Έστω τ.δ $x_1, \dots x_n$ από κατανομή Εκθ(θ) με σ.π.π $f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x}$ $\theta > 0$, $x > 0$. Να προσδιοριστεί η επαρκής σ.σ

$$f(\underset{\sim}{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} =$$

$$= \underbrace{\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \theta\right) h(x_1, \dots, x_n) = g(T(\underset{\sim}{x}), \theta) \cdot h(\underset{\sim}{x}) \quad \text{με } h(\underset{\sim}{x}) = 1$$

Άρα $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ το επαρκές στατιστικό ∎

Τα προηγούμενα παραδείγματα αναφέρονται σε κατανομές των οποίων το σύνολο θετικότητας δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ. Σε περίπτωση που το πεδίο θετικότητας της κατανομής εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο τότε η από κοινού κατανομή του τ.δ εκφράζεται μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης του συνόλου θετικότητας της από κοινού κατανομής.

Παράδειγμα (Ομοιόμορφη Κατανομή $U(0,\theta)$, $\theta>0$)

Έστω τ.δ $X_1,\dots X_n$ από ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$ με σ.π.π. $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}$, $0<x<\theta$. Να προσδιοριστεί το επαρκές στατιστικό.

Υπενθυμίζεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $A\subseteq\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

Η από κοινού συνάρτηση του τ.δ, που αποτελεί τη βάση του παραγοντικού θεωρήματος Neyman-Fisher είναι

$$f(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta},\ \text{για } 0<x_i<\theta,\ \forall i=1,\dots,n.$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x_i)=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\theta)}(x_i).$$

όμως $I_{(0,\theta)}(x_i)=\begin{cases}1 & 0<x<\theta\\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$ για $i=1,\dots n$ προκύπτει

$$\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\theta)}(x_i)=\begin{cases}1, & 0<x_i<\theta,\ \forall i=1,\dots n\\ 0, & \exists \text{ τουλ. ένα } i: x_i\notin(0,\theta)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0<x_i<\theta,\ \forall i=1,\dots n\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & 0<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta\\ 0, & \text{διαφορ.}\end{cases}$$

με $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$

Επομένως $\prod_{i=1}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) = I_{(0,X_{(n)})}(X_{(1)})\, I_{(0,\theta)}(X_{(n)})$.

και $f(\underline{x}, \theta) = \frac{1}{\theta^n} I_{(0,X_{(n)})}(X_{(1)}) \cdot I_{(0,\theta)}(X_{(n)}) =$

$$= \underbrace{\frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(X_{(n)})}_{g(X_{(n)},\, \theta)} \cdot \underbrace{I_{(0,X_{(n)})}(X_{(1)})}_{h(X_1, \dots X_n)}$$

Έτσι $f(\underline{x}, \theta) = g(T(\underline{x}), \theta)\, h(\underline{x})$.

όπου $T(\underline{x}) = X_{(n)}$ το επαρκές στατιστικό.

- Παράδειγμα (ομοιόμορφη κατανομή $U(\theta, \theta+1)$)

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $U(\theta, \theta+1)$, $\theta > 0$

και σ.π.π. $f(x, \theta) = 1$, $\theta < x < \theta + 1$, $\theta > 0$

Να προσδιορισθεί το επαρκές στατιστικό.

$f(\underline{x}, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} 1$ για $\theta < x_i < \theta + 1$ $\forall i = 1, \dots n$

$= \prod_{i=1}^{n} 1 \cdot I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\theta+1)}(x_i)$

$$I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) = \begin{cases} 1 & \theta < x_i < \theta + 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) = \begin{cases} 1, & \theta < x_i < \theta + 1, \ \forall i = 1, \dots n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \theta < X_{(1)} \leq X_{(n)} < \theta + 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επομένως

$$\prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) = I_{[\theta, X_{(n)}]}(X_{(1)}) \cdot I_{[\theta,\theta+1]}(X_{(n)}).$$

και $f(\underset{\sim}{x},\theta) = \underbrace{I_{(\theta,X_{(n)})}(X_{(1)}) \cdot I_{(\theta,\theta+1)}(X_{(n)})}_{g(X_{(1)},X_{(n)},\theta)\, h(\underset{\sim}{x})}$, με $h(\underset{\sim}{x}) = 1$

$= g(\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}),\theta)\, h(\underset{\sim}{x})$ με $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x}) = (T_1(\underset{\sim}{x}), T_2(\underset{\sim}{x})) = (X_{(1)}, X_{(n)})$

Παρατήρηση:

Το επαρκές στατιστικό μπορεί να είναι διδιάστατο παρά το γεγονός ότι η παράμετρος είναι μονοδιάστατη

Παρατηρήσεις στην επάρκεια:

α) Το τ.δ $X_1,\dots,X_n$ είναι πάντα επαρκής σ.σ αφού

$f(\underset{\sim}{x},\theta) = g(x_1,\dots,x_n,\theta)\, h(x_1,\dots,x_n)$ με $h(x_1,\dots,x_n) = 1$
και $g(x_1,\dots,x_n,\theta) = f(x_1,\dots,x_n,\theta)$.

β) Ένα-προς-ένα συνάρτηση επαρκούς στατιστικού είναι επαρκές στατιστικό. Πιο φορμαλιστικά:
Έστω $T_1 = T_1(X_1,\dots,X_n)$ επαρκές στατιστικό και w μια 1-1 συναρτ.
Τότε η στατιστική συνάρτηση $T_2 = T_2(X_1,\dots,X_n) = w(T_1)$ είναι επαρκής
Πράγματι αφού T_1 επαρκής
$f(\underset{\sim}{x},\theta) = g(T_1(\underset{\sim}{x}),\theta)\, h(\underset{\sim}{x}) = g(w^{-1}(T_2(\underset{\sim}{x})),\theta)\, h(\underset{\sim}{x})$
επειδή η w είναι 1-1 και επομένως $T_1 = w^{-1}(T_2)$.
Έτσι $f(\underset{\sim}{x},\theta) = g^*(T_2(\underset{\sim}{x}),\theta)\, h(\underset{\sim}{x})$, με
g^* συνάρτηση της g και της w^{-1} Άρα T_2 επαρκής

γ) Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ και έστω $T = T(\underset{\sim}{X}) = T(X_1, \dots, X_n)$ μια σ.σ.
Έστω $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta)$ $(= n I_X(\theta))$ και $I_{T(\underset{\sim}{X})}(\theta)$ τα μέτρα πληροφορίας του Fisher που βασίζονται στις κατανομές $f(\underset{\sim}{x}, \theta)$ και $f(t, \theta)$

Τότε: $I_{\underset{\sim}{X}}(\theta) \geq I_T(\theta)$ με ισότητα αν-ν η σ.σ T είναι επαρκής.

[Είναι αναμενόμενο ότι το ποσό πληροφορίας στο σύνολο των δεδομένων $X_1, \dots, X_n$ θα είναι μεγαλύτερο από το ποσό πληροφορίας σε οποιοδήποτε μετασχηματισμό τους.]

Θεώρημα Rao-Blackwell:

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από κατανομή $f(x, \theta)$ και έστω $T = T(\underset{\sim}{X})$ το επαρκές στατιστικό. Έστω επίσης $S = S(\underset{\sim}{X})$ αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$. Θεωρούμε επιπλέον τη στατιστική συνάρτηση S^* που ορίζεται $S^*(T) = E(S|T)$. Τότε

(i) Ο S^* είναι αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$.

(ii) $Var(S^*) \leq Var(S)$, για κάθε $\theta \in \Theta$.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι $E[E(X_1|X_2)] = E(X_1)$
$var(X_1) = E[Var(X_1|X_2)] + Var(E(X_1|X_2))$

(i) $E(S^*) = E[E(S|T)] = E(S) = g(\theta)$ άρα ο S^* είναι αμερόληπτος εκτιμητής ~~S~~ της $g(\theta)$, $\theta \in \Theta$

(ii)

$Var(S) = E[Var(S|T)] + Var[E(S|T)] =$

$= E[Var(S|T)] + Var(S^*)$.

Αλλά $Var(S|T) \geq 0$ και επομένως $E(Var(S|T)) \geq 0$

Έτσι $Var(S) \geq Var(S^*)$

Παρατηρήσεις:

α) Το θεώρημα Rao-Blackwell περιέχει ένα τρόπο βελτίωσης ενός αμερολ. εκτιμητή S με αξιοποίηση και του επαρκούς στατιστικού T. Ο βελτιωμένος εκτιμητής είναι ο S^* και ονομάζεται Rao-Blackwell βελτίωση του εκτιμητή S.

β) $MTΣ(S^*, \theta) \leq MTΣ(S, \theta)$, $\theta \in \Theta$

$MTΣ(U, \theta) = Var(U) + (E(U) - g(\theta))^2$.

Άρα ο S^* είναι βελτιωμένος και με κριτήριο το ΜΤΣ.

Ερώτημα:

Μπορεί ένας αμερόληπτος εκτιμητής να βελτιωθεί ακόμη περισσότερο ώστε να γίνει ΑΟΕΔ;

ΝΑΙ,

ορ. Πληρότητα:

Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από κατανομή $f(x, \theta)$, $\theta \in \Theta$ και έστω στατιστικό $T = T(X)$. Η οικογένεια κατανομών του T ονομάζεται πλήρης αν-ν η ισότητα $E(\varphi(T)) = 0$ $\forall \theta \in \Theta$ συνεπάγεται ότι $\varphi(T) = 0$, δηλ. $\varphi(t) = 0$, για κάθε τιμή t του T, με φ να συμβολίζει μια συνάρτηση του στατιστικού T.

Λιγότερο τυπικά: η σ.σ $T=T(\underline{x})$ θα λέγεται πλήρης αν-ν ο μόνος αμερόληπτος εκτιμητής του 0, που είναι συνάρτηση του T, είναι η μηδενική συνάρτηση.

Θεώρημα Lehmann-Scheffe:

Έστω τ.δ $X_1,\dots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$, $\theta\in\Theta\subseteq\mathbb{R}$.
Έστω $T=T(\underline{x})=T(X_1,\dots,X_n)$ μια πλήρης και επαρκής συνάρτηση και έστω $S=S(T)$ ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ που είναι συνάρτηση του επαρκούς και πλήρους T.
Τότε η S είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της $g(\theta)$ και μάλιστα S είναι ο μοναδικός ΑΟΕΔ.

Απόδειξη:

Έστω $S^*=S^*(T)$ ένας άλλος αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$
Τότε $E(S^*)=g(\theta)$
Επίσης $E(S^*-S)=E(S^*)-E(S)=g(\theta)-g(\theta)=0$, $\forall\theta\in\Theta$
Επειδή T είναι πλήρης ισχύει
$E(\varphi(T))=0\quad\forall\theta\in\Theta \Rightarrow \varphi(T)=0$
Άρα αφού $E(S^*(T)-S(T))=0 \Rightarrow S^*(T)-S(T)=0 \Rightarrow S^*=S$
Άρα μόνο ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ υπάρχει ο οποίος είναι συνάρτηση του T.
Έστω S^{**} ένας άλλος αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ όχι κατ' ανάγκη συνάρτηση του T, τότε από το Θεώρημα Rao-Blackwell
$\boxed{Var(E(S^{**}|T))\leq Var(S^{**})}$ (✪)
Επειδή $E(E(S^{**}|T))=E(S^{**})=g(\theta)$ και επειδή μόνο ένας αμερόληπτος εκτιμητής της $g(\theta)$ υπάρχει, ο $S(T)$, θα πρέπει $E(S^{**}|T)=S(T)$. Τότε όμως από την (✪)
$Var(S)\leq Var(S^{**})$ που σημαίνει ότι ο S είναι ΑΟΕΔ της $g(\theta)$.

Scanned with CamScanner

Το Θεώρημα Lehmann-Scheffe μας εφοδιάζει ~~...~~ μαζί με την ανισότητα Cramer-Rao, με μια δυναμική μέθοδο κατασκευής ΑΟΕΔ εκτιμητών.

Βήματα μεθόδου:

$\boxed{\text{I}}$ Προσδιορίζεται το επαρκές και πλήρες στατιστικό T

II) Επιχειρείται να βρεθεί συνάρτηση S του επαρκούς και πλήρους στατιστικού T η οποία να είναι αμερόληπτη της $g(\theta)$.

Παράδειγμα (Κατανομή Bernoulli)

Έστω τ.δ με κατανομή Bernoulli, δηλ. διωνυμική $B(n=1,\theta)$, $0<\theta<1$
Να κατασκευαστεί ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ και της θ^2.

Το επαρκές στατιστικό έχει προσδιορισθεί $T=T(\underline{X})=\sum_{i=1}^{n} X_i$
Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι πλήρης
Ξεκινάμε από την παραδοχή ότι $E(\varphi(T))=0$ $\forall\theta\in(0,1)$ και πρέπει να καταλήξουμε σε $\varphi(t)=0$ $\forall t$, όπου φ πραγμ. συναρτ.

$E(\varphi(T))=\sum_{t}\varphi(t)p_T(t)$, αν T είναι διακριτή

και $E(\varphi(T))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f_T(t)dt$ αν T είναι συνεχής

Επομένως πρέπει να βρεθεί η κατανομή της $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$

Η ροπογεννήτρια της $T=\sum_{i=1}^{n} X_i$ είναι

$$m_T(t) = E(e^{tT}) = E(e^{tX_1+\dots+tX_n}) = E(e^{tX_1}\cdots e^{tX_n}) \underset{=}{\overset{X_i \text{ ανεξ.}}{=}}$$

$$= E(e^{tX_1})\cdots E(e^{tX_n}) = \prod_{i=1}^{n} m_{X_i}(t) \underset{=}{\overset{X_i \text{ ισονομ.}}{=}}$$

$$= [m_X(t)]^n = [\theta e^t + (1-\theta)]^n$$

όμως $[\theta e^t + (1-\theta)]^n$ είναι η ροπογεννήτρια της $B(n,\theta)$ άρα η κατανομή του T είναι η $B(n,\theta)$ λόγω του μονοσήμαντου των ροπογεννητριών.

$$E(\varphi(T)) = 0 \Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \varphi(t) p_T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \varphi(t) \binom{n}{t} \theta^t (1-\theta)^{n-t} = 0 \quad \forall \theta \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \varphi(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t (1-\theta)^n = 0 \quad \forall \theta \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \sum_{t=0}^{n} \varphi(t) \binom{n}{t} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^t = 0 \quad \forall \theta \in (0,1)$$

για $a = \dfrac{\theta}{1-\theta}$

$$\sum_{t=0}^{n} \varphi(t) \binom{n}{t} a^t = 0 \quad \forall \theta \in (0,1)$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι ένα πολυώνυμο n-βαθμού ως προς a. $= 0$ $\forall \theta$ και επομένως για κάθε a έχει άπειρες ρίζες. Αυτό συμβαίνει μόνο αν είναι το μηδενικό πολυώνυμο, δηλ οι συντελεστές των δυνάμεων του a είναι ίσοι με 0. Άρα $\varphi(t)\binom{n}{t} = 0$, $\forall t$ και έτσι $\varphi(t) = 0$ $\forall t$ άρα T πλήρης

Τώρα αρκεί να βρεθεί μια συνάρτηση του T αμερόληπτη εκτιμήτρια της θ. Για την εύρεση της στηριζόμαστε στη γνώση του επαρκούς και πλήρους T και ειδικότερα στην κατανομή του.

$T=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,\theta)$ άρα $E(T)=n\theta$ ή $E\left(\frac{1}{n}T\right)=\theta$

Άρα η στατιστική συνάρτηση $\frac{1}{n}T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$

είναι αμερόληπτος εκτιμητής της θ.

Συγκεντρωτικά: η $\bar{X}$ είναι του επαρκούς και πλήρους $\sum_{i=1}^{n}X_i$ και αμερόληπτος της θ, άρα ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ

Για την εύρεση ΑΟΕΔ εκτιμητή της θ^2 αρκεί να βρεθεί συνάρτηση της $T=\sum_{i=1}^{n}X_i$ που είναι αμερόληπτος της θ^2

$Var(T)=n\theta(1-\theta)$

$Var(T)=n\theta(1-\theta)=E(T^2)-(ET)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(T^2)=n\theta(1-\theta)+n^2\theta^2=n\theta-n\theta^2+n^2\theta^2=$

$=E(T)+n(n-1)\theta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(T^2)-E(T)=n(n-1)\theta^2 \Rightarrow \frac{E(T^2)-E(T)}{n(n-1)}=\theta^2$

$\Rightarrow E\left(\frac{T^2-T}{n(n-1)}\right)=\theta^2$ Άρα ο $\frac{T^2-T}{n(n-1)}$ είναι ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ^2.

Παράδειγμα (Ομοιόμορφη Κατανομή)

Έστω τ.δ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$, $\theta>0$

Να κατασκευασθεί ΑΟΕΔ εκτιμητής της θ.

Το επαρκές στατιστικό είναι το $T = X_{(n)}$.

Για τη διερεύνηση της Πληρότητας του $T = X_{(n)}$ αρκεί να δειχθεί ότι Αν $E[\varphi(T)] = 0$, $\forall \theta>0$ τότε $\varphi(t) = 0$, $\forall t$.

$E(\varphi(T)) = \int \varphi(t) f_T(t) dt$ απαιτείται ο υπολογισμός της

κατανομής f_T του $T = X_{(n)}$

$F_T(t) = P(T \leq t) = P(\max\{X_1, \ldots, X_n\} \leq t) = P(X_i \leq t,\ \forall i=1,\ldots,n) =$

$\underset{\text{ανεξ.}}{\overset{X_i}{=}}\ \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(t)$ επειδή $X_1, \ldots X_n$ ισόνομα

από κατανομή $U(0,\theta)$ με σ.δ.κ $F_X(t) = \frac{t}{\theta}$, $0<t<\theta$.

Έχουμε $F_T(t) = \prod_{i=1}^{n} F_X(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$, $0<t<\theta$

Άρα $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}$, $0<t<\theta$

$E(\varphi(T)) = 0$ $\forall \theta>0$ ή $\int_0^{\theta} \varphi(t) f_T(t) dt = 0$ $\forall \theta>0$

ή $\int_0^{\theta} \varphi(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = 0$, $\forall \theta>0$

ή $\int_0^{\theta} \varphi(t) t^{n-1} dt = 0$ Παραγωγίζοντας ως προς θ έχουμε:

$\frac{d}{d\theta} \int_0^{\theta} \varphi(t) t^{n-1} dt = 0$ $\forall \theta>0$ ή $\varphi(\theta)\theta^{n-1} = 0$, $\forall \theta>0$

ή $\varphi(\theta)=0 \ \forall \theta>0$ Άρα $T=X_{(n)}$ πλήρες στατιστικό

Αρκεί να βρεθεί συνάρτηση του T που να είναι αμερόληπτη της θ. Δοκιμάζουμε την ίδια την T:

$$E(T)=\int_0^\theta t\, f_T(t)dt=\int_0^\theta t\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n dt$$

$$E(T)=\frac{n}{\theta^n}\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta=\frac{n}{n+1}\theta$$

Ο T δεν είναι αμερόληπτος της θ

όμως $E\left(\frac{n+1}{n}T\right)=\theta$.

Άρα ο $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ είναι αμερόληπτος της θ

Παρατηρήσεις

α) Αν το σύνολο θετικότητας της κατανομής του πληθυσμού είχε ως κάτω άκρο την άγνωστη παράμετρο θ, ήταν π.χ της μορφής (θ, a) τότε η διαδικασία εύρεσης της πλήρους στατιστικής συνάρτησης είναι η ίδια

β) Στο δεύτερο βήμα απαιτείται ο προσδιορισμός μιας συνάρτησης που είναι αμερόληπτος εκτιμητής της θ. Σε μερικές περιπτώσεις η $U=U(T)$ μπορεί να προσδιορισθεί ξεκινώντας από την επιθυμία και η U να είναι αμερόληπτη της θ. Δηλαδή από την εξίσωση $E(U)=\theta$ και επιλύοντας την να οδηγηθούμε στην μορφή $U=U(T)$

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα
Αναζητείται $u=u(T)$ με $T=T_{X(n)}$ τ.ω. $E[u(T)]=\theta$.

$$\int_0^\theta u(t)\, f_T(t)\,dt=\theta \Rightarrow \int_0^\theta u(t)\,\frac{n t^{n-1}}{\theta^n}\,dt=\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta t^{n-1} u(t)\,dt=\frac{\theta^{n+1}}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta t^{n-1} u(t)\,dt=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \theta^{n-1} u(\theta)=\frac{n+1}{n}\theta^n \Rightarrow u(\theta)=\frac{n+1}{n}\theta.$$

Επομένως αν θεωρήσουμε $u(T)=\frac{n+1}{n}T$, η $u(T)$ αμερόληπτη της θ και συνάρτηση του επαρκούς και πλήρους.